ММ Логические задачи и принцип Дирихле
5-6 классы

В математических задачах (и не только) часто используют формулировки «только один…», «хотя бы один…», «по крайней мере, один…», «больше одного…», «не меньше одного…». Подумайте, чем отличаются эти формулировки. Это вам поможет при решении задач.

Задача 1. В поле резвятся 7 козлят. По крайней мере, два из них вздумали убежать в лес погуляти. Сколько козлят ***абсолютно точно*** (мы это можем утверждать наверняка) не побегут в лес?

Ответ. 0.

Решение.

Фраза «по крайней мере 2…» означает, что в лес могли убежать 2 и больше козликов. Допускается, что в лес убегут все 7 козликов. Значит, утверждать наверняка, что хотя бы один останется, мы не можем, то есть не побегут в лес наверняка 0 козлят, возможно, и больше.

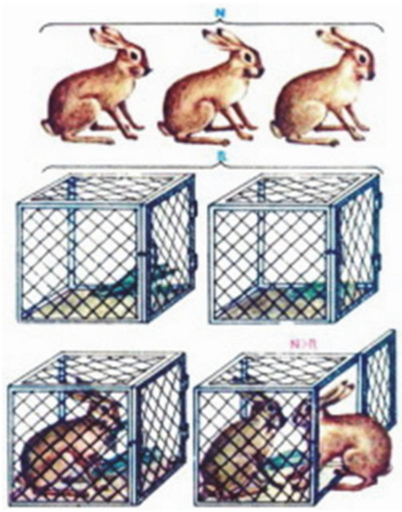
Задача 2. В летний лагерь приехали три одноклассника, остальные ребята были не знакомы друг с другом. Какие утверждения верны?

1. В лагерь приехали меньше пяти одноклассников.
2. В лагерь приехали не более пяти одноклассников.
3. В лагерь приехали не менее трех одноклассников.
4. В лагерь приехали более трех одноклассников.
5. В лагерь приехали меньше трех одноклассников.

Ответ. 123.

Решение.

1) $3 < 5$ – да;
2) $3 \leq 5$ – да (не более пяти – это означает 5 и менее);
3) $3 \geq 3$ – да (не менее трех – 3 и более);
4) $3 > 3$ – нет;
5) $3 < 3$ – нет.



В математике существует множество принципов. Одним из них является принцип Дирихле. Популярно его можно сформулировать так: если кроликов больше, чем клеток, то найдется, по крайней мере, одна клетка в которой окажутся, по крайней мере, два кролика. Очевидно, если у вас есть две клетки и три кролика, то их можно посадить либо всех в одну клетку, и тогда в ней окажется «по крайней мере, два кролика»; либо посадить одного в одну, а два других в другую (именно в ней окажется «по крайней мере, два кролика»). В любом случае такая клетка найдется. Решая задачи, вы должны представить, что вы будете считать «клетками», а что «кроликами».

Задача 3. В группе 25 учеников. Верно ли, что найдутся, по крайней мере, трое, отмечающие свой день рождения в одном месяце. Соотнесите, что (кого) в этой задаче можно считать «клетками», а что (кого) - «кроликами»?

Примените принцип Дирихле и ответьте на вопрос задачи.

Ответ. Ученики – кролики (их 25), месяцы – клетки (их 12). Да.
Решение. Так как месяцев в году 12, то в случае равномерного распределения дней рождения школьников, имея 24 человека, получим по два дня рождения в месяц, 25-й человек точно окажется третьим в каком-то месяце. Возможно, что найдется месяц, в котором будет более трех именинников.

Задача 4. Какое наименьше число учеников должно быть в школе, имеющей 30 классов, для того чтобы в ней обязательно был класс, в котором не меньше 28 учеников?

Ответ. 811.
Решение. Рассмотрим «наихудший случай» - ни в одном классе нет 28 и более учеников, максимально возможное число учеников $30 \cdot 27 = 810$. Тогда 811-ый человек точно окажется 28-м в каком-то классе. (Так может случиться, что при меньшем числе учеников найдется класс, в котором не меньше 28 человек, но это не наверняка, в случае 811 человек это событие наверняка произойдет).

Задача 5. Бабушка летом заготовила для внуков варенье: 10 банок клубничного, 12 банок абрикосового и 7 банок вишневого варенья. Для лучшего хранения она запечатала все варенье в непрозрачные банки, но при этом забыла их подписать. Какое наименьшее количество банок надо взять, чтобы среди них точно были три банки с одинаковым вареньем?

Ответ. 7.
Решение. Исходя из принципа наихудшего варианта, сначала могут попадаться 2 банки с одним вареньем, две - с другим, и еще две - с третьим. Следующая (седьмая) банка позволит подобрать три банки с одинаковым вареньем.

Задача 6. «Машины страшилки». В темной-темной комнате стоит черная-черная коробочка, а в ней лежат темные-темные носочки: 6 темно синих, 12 темно коричневых и 4 темно серых. Темный человек засовывает темную ручечку в коробочку и достает… носочки! Сколько носков нужно достать, чтобы наверняка оказалось хотя бы по два носка каждого цвета?

Ответ. 20.
Решение. Исходя из принципа наихудшего варианта, сначала могут попадаться только два цвета носков, причем тех цветов, которых больше по количеству: 12+6=18, а следующие два носка образуют пару третьего цвета. Итого 20.

Задача 7. В очереди за мороженым стоят четыре человека. Семен находится между Борисом и Машей. Маша стоит перед двумя другими детьми, Дима занимает место перед Машей. Кто в очереди первый, второй, третий и четвертый?

Ответ. 1 – Дима; 2 – Маша; 3 – Семен; 4 - Борис
Решение. Так как Маша стоит перед двумя другими детьми, а Дима перед ней, то первый – Дима, а вторая Маша. Семен между Борисом и Машей, значит, Семен – третий, а Борис – четвертый.

Задача 8. Миша вернулся из школы и обнаружил на двери в кухню следующую записку: «Обед находится в кухне, читай там четыре записки, но помни, что только на одной из них написана правда».
Четыре записки были прикреплены к шкафчику, холодильнику, хлебнице и плите. Вот их содержание:
На шкафчике: «Обед либо в холодильнике, либо в хлебнице».
На холодильнике: «Обед либо в шкафчике, либо в духовке».
На хлебнице: «Обеда здесь нет».
На плите: «Обед здесь, в духовке».
Где на самом деле Миша должен искать обед?

Ответ. В хлебнице.

Решение.

1. Допустим, обед в шкафчике. Тогда записки на холодильнике и хлебнице верные. По условию правда только на одной записке.
2. Допустим, обед в холодильнике. Тогда верны тоже две записки: на шкафчике и на хлебнице.
3. Допустим, обед в духовке. Верны три записки: на холодильнике, на хлебнице и на плите.
4. Допустим, обед в хлебнице. Верна записка только на шкафчике.

Задача 9. Рассмотрим пять произвольных различных натуральных чисел. Какие утверждения будут точно верными при любом наборе этих чисел?

1. Среди этих чисел есть как четные, так и нечетные.
2. Всегда можно выбрать три числа, сумма которых делится на 3.
3. Если сумма этих чисел нечетна, то и произведение тоже нечетно.
4. Если сумма этих чисел четна, то и произведение тоже четно.
5. Всегда из этих чисел можно выбрать два числа, разность которых будет делиться на 4.

Укажите номера верных утверждений в порядке возрастания (без пробелов и запятых).

Подсказка. Рассмотрите остатки чисел при делении на 3 и на 4. Какими они могут быть в каждом случае?

Ответ. 245

Решение.

Утверждение 1 неверно (все числа могут быть одинаковой четности).

Утверждение 2 верно. Если среди пяти чисел присутствуют все три числа, которые дают различные остатки при делении на 3, то, взяв три числа с различными остатками (0, 1 и 2), мы найдем три числа, которые в сумме дают число, делящееся на 3. Будем считать, что среди наших пяти чисел встречаются числа, дающие всего два различных остатка. Значит, по принципу Дирихле из пяти чисел можно выбрать три, дающие одинаковые остатки при делении на 3 (так как имеется лишь два различных остатка среди наших пяти чисел). Их сумма, очевидно, делится на 3.

Утверждение 3 неверно. Может быть 4 четных числа и одно нечетное. Их сумма нечетна, а произведение четно.

Утверждение 4 верно. Четная сумма возможна, когда нечетных чисел нет вообще или их ровно 2, или их ровно 4 (сумма двух нечетных чисел дает четный результат). Значит, обязательно среди пяти произвольных чисел есть четное число. Тогда произведение тоже четно.

Утверждение 5 верно. При делении на 4 возможны только 4 различных остатка: 0, 1, 2 или 3. Значит, какие-то два числа точно будут иметь одинаковые остатки. Их разность будет делиться на 4.

В этой задаче «клетки» - это возможные остатки при делении, а «кролики» - произвольные пять чисел.

Задача 10. В международный математический лагерь приехали школьники из разных европейских городов. За одним столом обедали 5 человек и выясняли, кто из какого города приехал.
Алиса: я живу в Лондоне, как и Боб, а Патрик живет в Париже.
Боб: я живу в Берлине, Шульц – тоже. Патрик живет в Париже.
Патрик: Я, как и Алиса, не живу во Франции; Мария же живет в Мадриде.
Мария: Мой отец живет в Лондоне, мать – в Париже, а я живу с бабушкой в Марселе.
Шульц: Алиса приехала из Лондона, Боб – тоже, а я живу в Марселе.
Нужно иметь в виду, что каждый из участников разговора один раз солгал и дважды сказал правду. В каком городе живет каждый из пяти участников математического лагеря?
Примечание. Марсель и Париж – это города Франции, Мадрид – в Испании, Берлин – в Германии и Лондон – в Англии.

Ответ. Алиса - Лондон
Боб – Берлин
Мария - Мадрид
Патрик - Париж
Шульц - Марсель

Решение.

1) Допустим, что Патрик живет не в Париже. Тогда Алиса и Боб третий раз говорили неправду, а первые их два высказывания верны. Возникает противоречие (Алиса утверждает, что Боб живет в Лондоне, а Боб заявляет, что он живет в Берлине). Значит, предположение неверно.
2) Итак, Патрик живет в Париже (это верно). Тогда третье заявление Алисы верное, а из первых двух следует, что либо она сама живет в Лондоне, тогда Боб – не в Лондоне; либо наоборот, Боб – в Лондоне, а Алиса не в Лондоне. Тогда из заявления Шульца следует, что он живет в Марселе.
3) В высказывании Патрика ложью является то, что он не живет во Франции, так как ранее установлено, что он живет в Париже (столице Франции). Тогда его последнее высказывание верно, т.е. Мария живет в Мадриде.
4) Так как Шульц живет в Марселе (п. 2), то второе высказывание Боба ложно, значит, первое истинно, т.е. Боб живет в Берлине.
5) Тогда Алиса живет в Лондоне (см. выводы в п. 2).